

欢迎您参加网络讲座

混合整数优化 (MIP)

算法、发展和在电力和能源行业的应用



GUROBI
OPTIMIZATION

The World's Fastest Solver

混合整数优化 – 算法

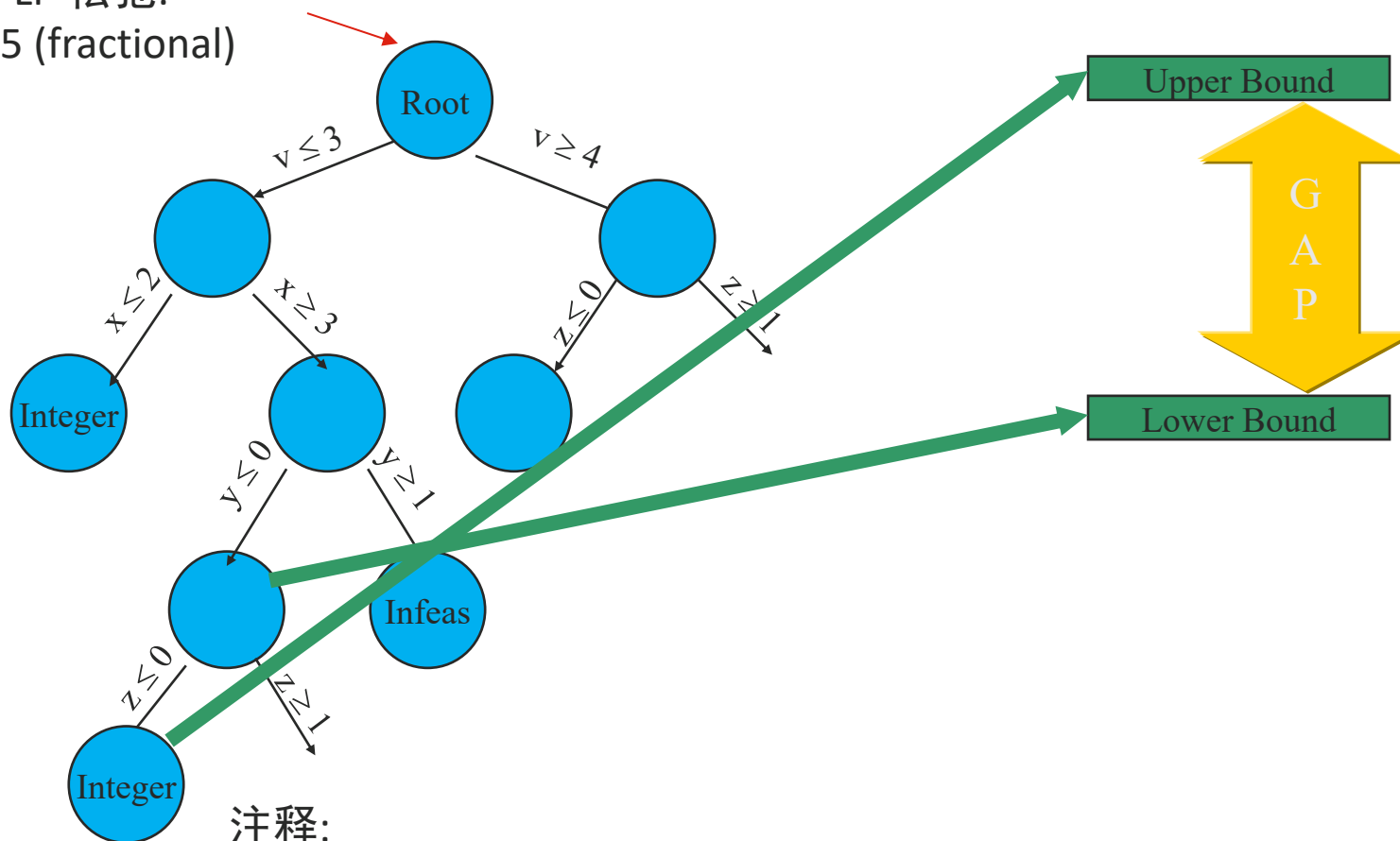
一个（线性）混合整数优化问题具有如下形式：

$$\begin{aligned} & \textit{Minimize} && c^T x \\ & \textit{Subject to} && Ax = b \\ & && l \leq x \leq u \\ & && \text{some or all } x_j \text{ integer} \end{aligned}$$

MIP 求解框架: 基于 LP 的分支定界

求解 LP 松弛:

$v=3.5$ (fractional)



注释:

(1) $GAP = 0 \Rightarrow$ 最优性证明

(2) 实际应用: 好的可行解就可以满足需求

MIP 不能简单地看做一个算法

MIP 通常被认为是一个算法

- 基于松弛的分支定界法

这是一种狭窄的看法

更应该看做是一个描述优化问题的表示性解决框架

- 由丰富的数学基础知识来支撑
 - 线性规划, 对偶理论, 多面体理论等等

允许融入丰富的各种算法

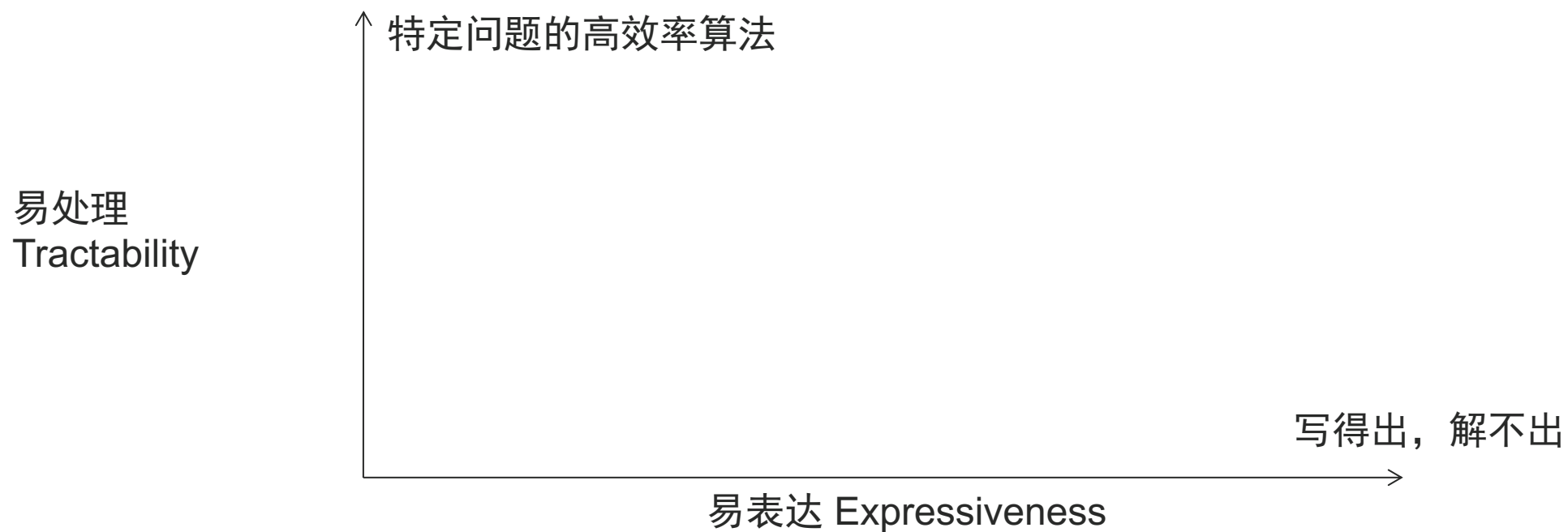
- 很多很多技巧与手法
- 系统性地、自动地应用

只有融合在一起, 才能得到一个稳健而有效的方法

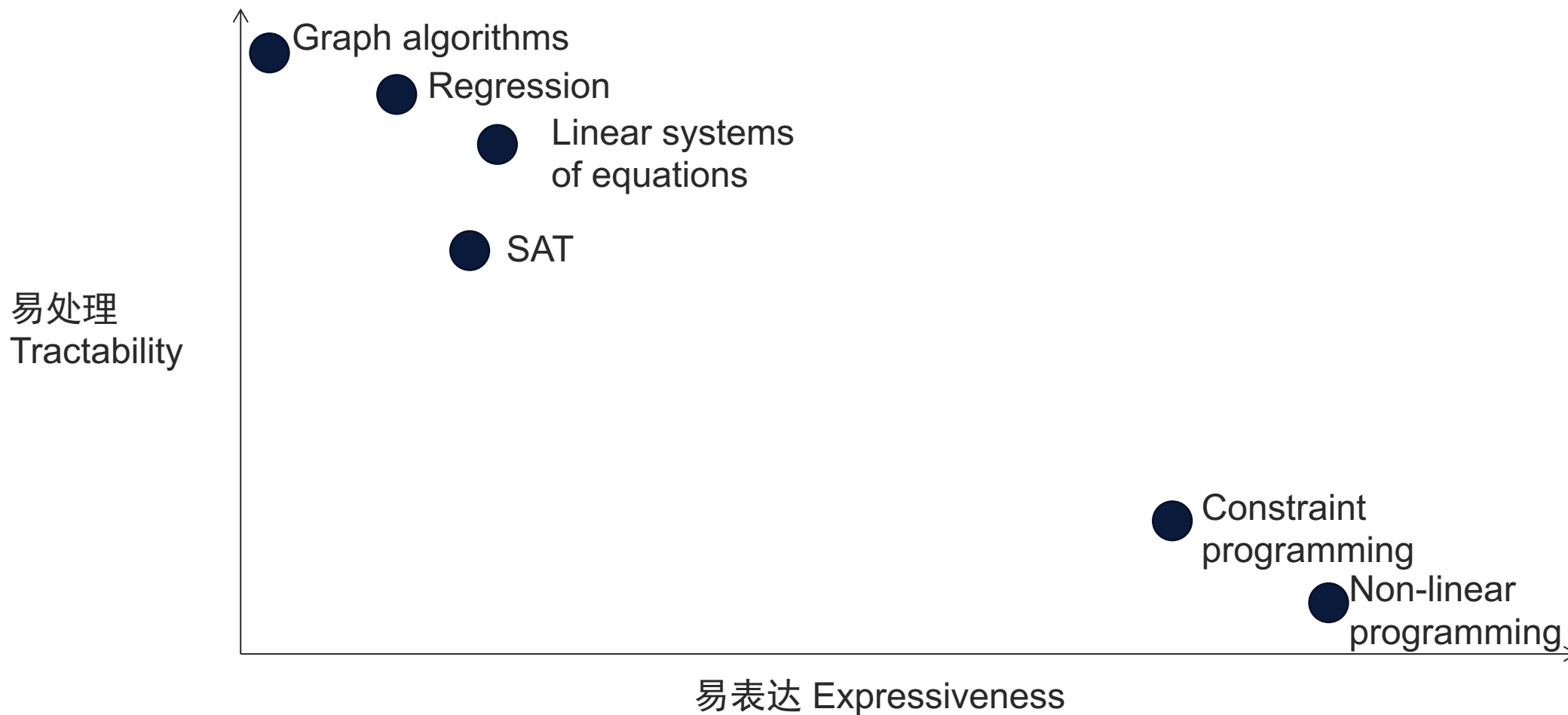
易表达性(Expressiveness) Versus 易处理性(Tractability)

问题和算法

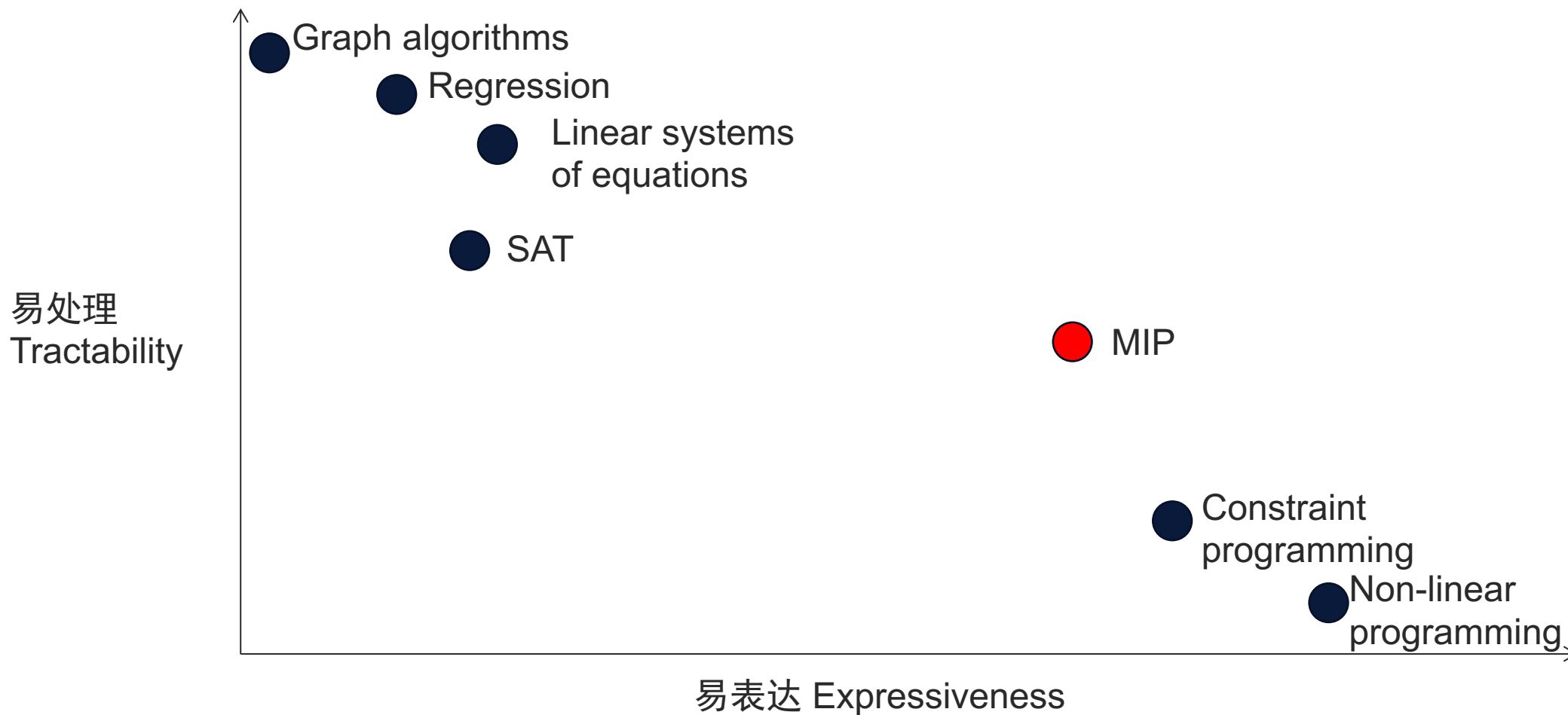
需要在易表达性和易处理性上做取舍



一些例子



一些例子



MIP 的一些重要特质

表示解决性Declarative

- 不需要为了增加额外的约束而改写算法

易表达性Expressive

- 添加辅助约束通常不会改变问题类型

常规问题结构(Ax=b) Regular problem structure

- 允许快速识别有用的与特殊性的结构

MIP 的进步和发展历史

MIP 在 Gurobi 中的进步 (按照类别)

预优化 - 7.8%

- 8 项改进, 最大 2.0%

节点预优化 - 4.2%

- 5 项改进, 最大 1.3%

对称性 - 7.0%

- 3 项改进, 最大 3.1%

LP - 17.5%

- 很多小改进

切平面 - 14.3%

- 6 项改进, 最大 6.3%

分支 - 2.8%

启发算法 - 4.6%

- 5 项改进, 最大 1.4%

各种技巧与手法

MIP 受益于各种学科

举一些例子:

- 图论算法:
 - 双连通部分
- 数论
 - 模倒数 (也叫模反元素、模逆元)

双连通部分 Bi-Connected Components

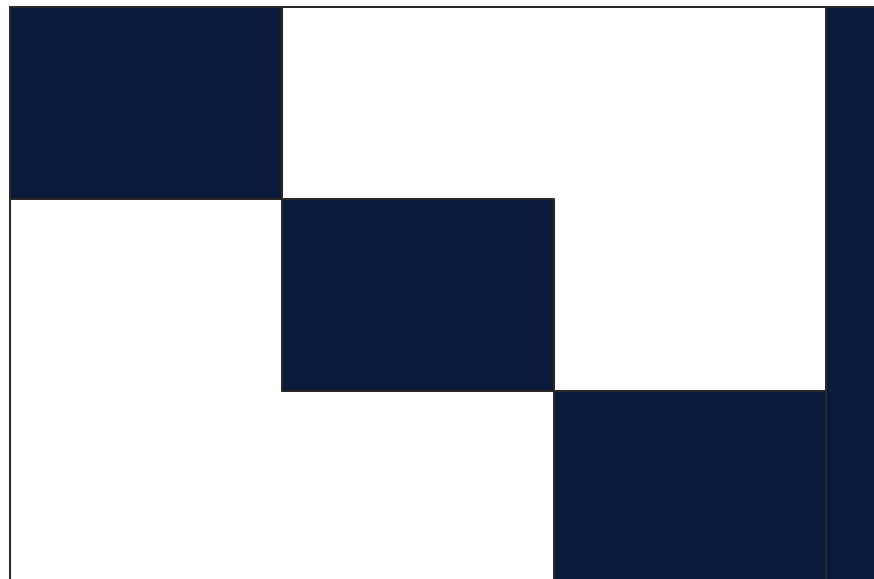
分离部分 Disconnected Components



作为单一模型，优化时间随着部分数 n 按照 $\#nodes^n$ 增加
分离后，优化时间按照 $\#nodes * n$ 增加

接近分离部分 Nearly Disconnected Components

$A =$



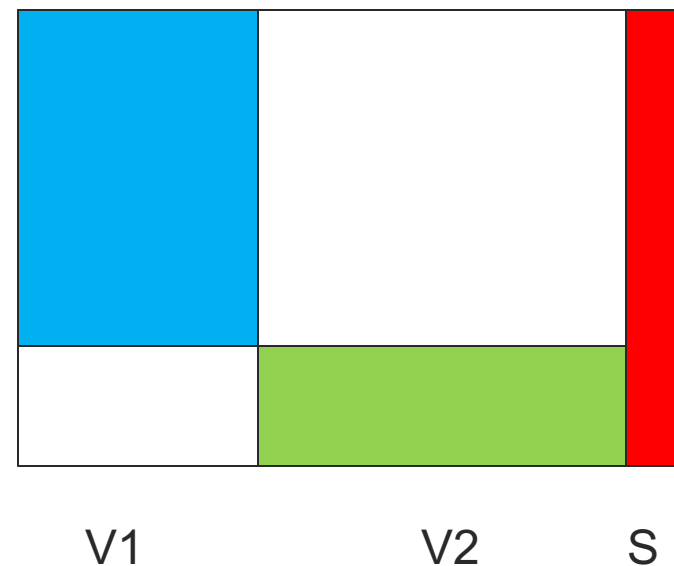
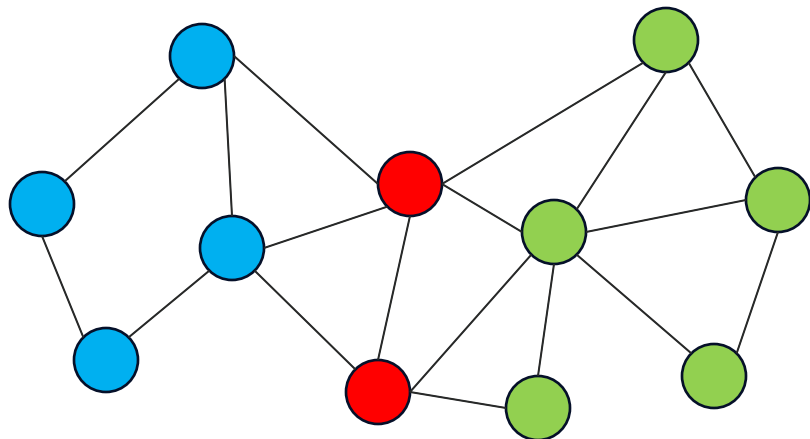
发现变量，使之可以分解模型，创造分离部分

发现可以分解模型的变量

问题相当于在A的交叉图中找到分隔点

- 交叉图:
 - 一个节点对应一个变量
 - 一条边 (i,j) 对应变量 i 和 j 出现在同一个约束中
- 分隔点
 - 一组点, 如果移除, 可以将图进行分离

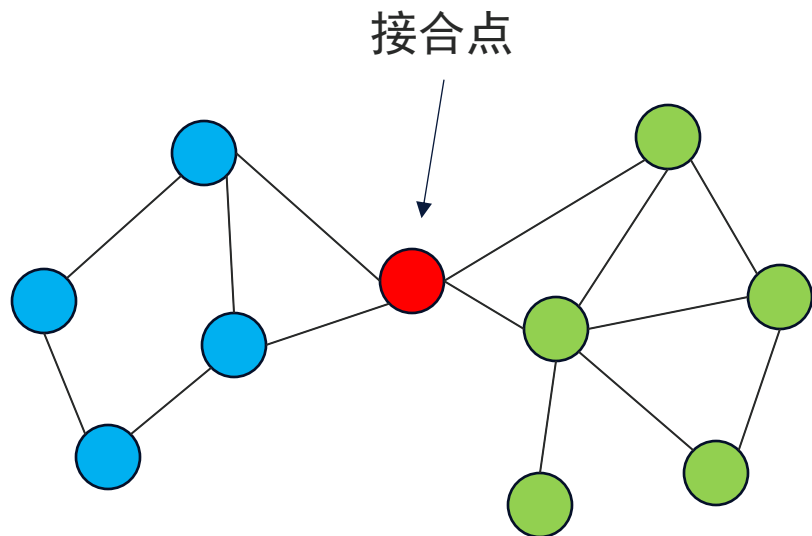
交叉图 Intersection Graph



V1 和 V2 之间没有连线意味着...

- V1 和 V2 的变量没有出现在同一个约束中

双连通部分 Bi-Connected Components



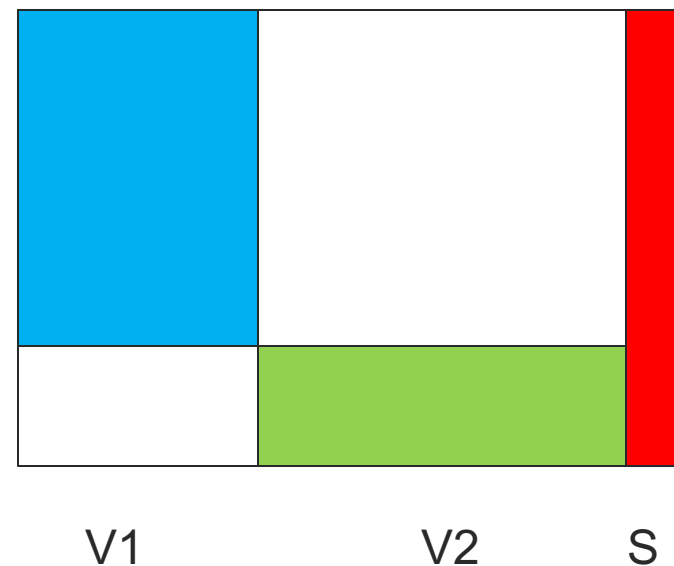
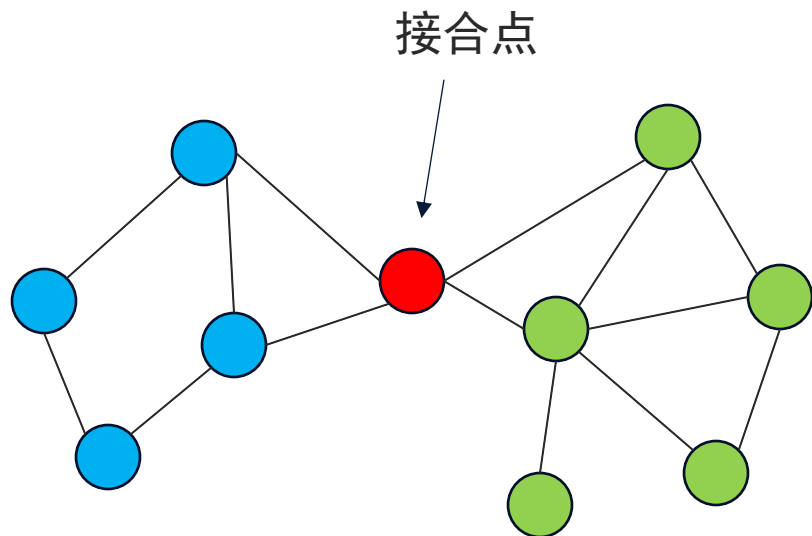
识别可以分离图形的单一点

算法由 **Lipton and Tarjan** 提出

算法时间随图形中边的数量线性增加

- 识别可以分离图形的所有点

双连通部分 Bi-Connected Components



如果接合点是个**0-1**变量

- 固定到 1 – 独立求解余下的部分
- 固定到 0

探索双连通部分结构来创建分离部分

通常会比求解整个问题要更快

数论 Number Theory

模逆消减 Modular Inverse Reduction

考虑

- $a x + b y = c$ (possibly after aggregation)
- x, y are integer variables
- a, b and c are integers, $a > 1$
- Assume $\text{GCD}(a,b) = 1$
 - Divide through by GCD otherwise

计算 a 的模倒数

- Integer m such that $a m = 1 \pmod{b}$
 - Computed using *extended Euclidean algorithm*
- Transformation
 - $a x + b y = c$
 - $m a x + m b y = m c$
 - $x = m c \pmod{b}$

模逆消减 Modular Inverse Reduction – 举例

$$5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 31 \text{ (全部整数变量)}$$

- 替换 $y = x_1 + 2x_2 + 2x_4$
- $5y + 3x_3 = 31$

$$3 \bmod 5 \text{ 的模倒数是 } 2 \text{ (} 2 * 3 = 1 \pmod{5} \text{)}$$

- $10y + 6x_3 = 62 \pmod{5}$
- $x_3 = 2 \pmod{5}$
- $x_3 = \{ 2, 7, 12, 17, \dots \}$

可以看到

- 在 MIP 搜索树中, 如果在松弛中 $x_3 = 3.5$
 - 通常分支: $x \leq 3$ or $x \geq 4$
 - 更好分支: $x \leq 2$ or $x \geq 7$

效果

- 对于某类模型优化时间从 10000+ 秒降低到 0.01 秒
- 如果有效, 则有显著成效

混合整数优化 – 发展

历史发展

算法

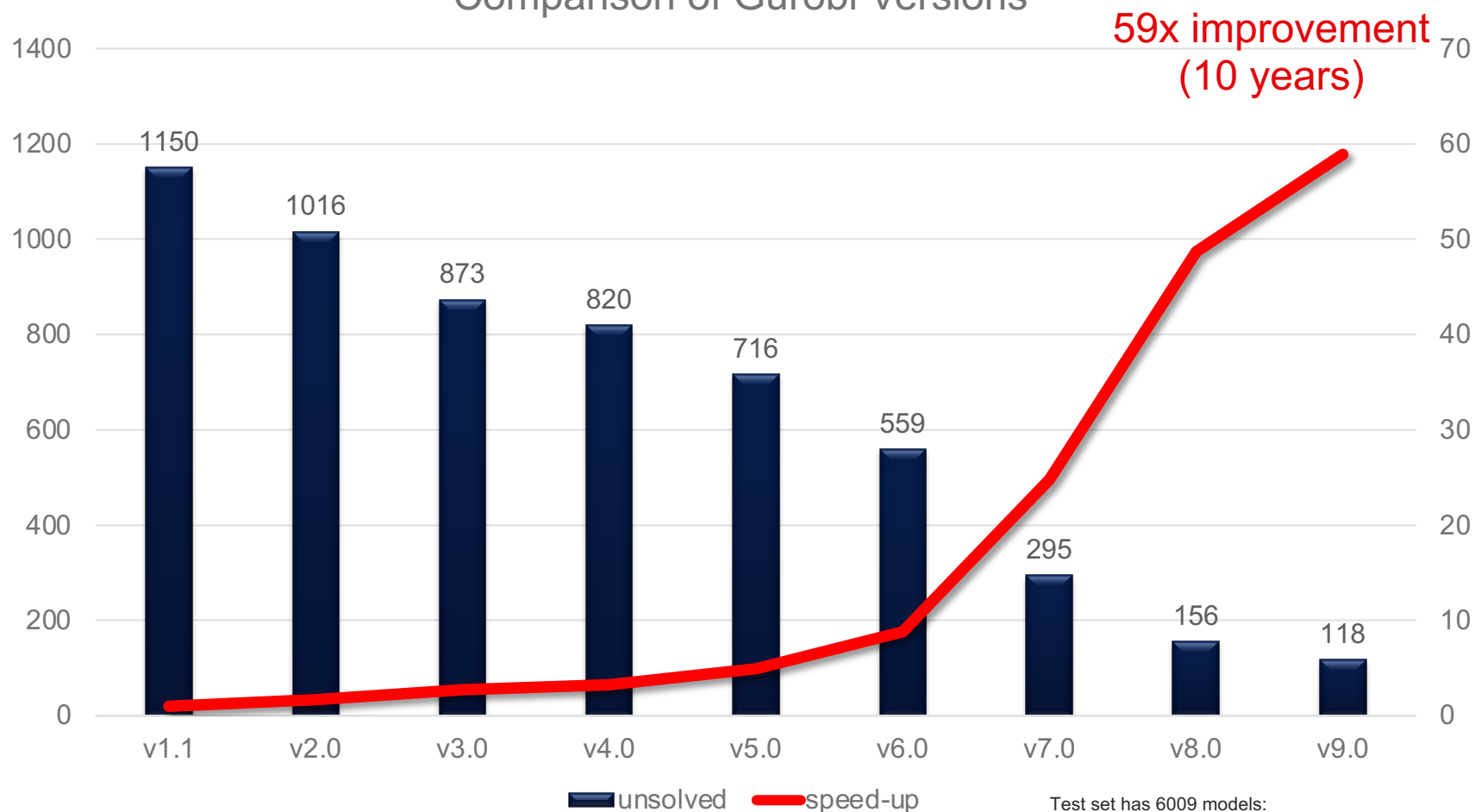
- LP
 - 单纯形: 1947 Dantzig
 - 内点法 (障碍法): 1984 Karmarkar
- MIP
 - 切平面: 1957 Gomory
 - 分支定界: 1960 Land, 1965 Doig

过去30年的计算效率发展

- LP: > 10,000X
- MIP: > 1,000,000X
- Machines: > 5,000X

发布每一个版本，我们都提升求解速度

Comparison of Gurobi Versions



Time limit: 10000 sec.
Intel Xeon CPU E3-1240 v3 @ 3.50GHz
4 cores, 8 hyper-threads
32 GB RAM

Test set has 6009 models:
- 473 discarded due to inconsistent answers
- 1580 discarded that none of the versions can solve
- speed-up measured on >100s bracket: 2197 models

深受 MIP 改变的 行业 – 电力和能源

1990年代后期电力市场管制的取消

需要创造电力市场

早期解决方案技巧:

- 启发式 (拉格朗日松弛)
- MIP (模型很多; 没有实际应用)

EPRI 报告, 1989年6月:

- “混合整数优化(MIP) 是一个强大的建模工具. 但是他们理论上过于复杂, 计算上过于繁琐不便”

DIMACS 1999 会议:

- Bob Bixby 展示了 MIP 技术已经发展到了可以解决实际问题的程度.

几年之内, 世界上几乎所有电力运营商都在使用 **MIP** 来求解模型



深受 MIP 改变的行业



电力和能源

NYISO 批量销售电能优化

依赖 Gurobi 优化 500 个发电站和 11,000 英里传输系统来满足消费者实时的需求



供应链

SAP 供应链优化

Gurobi 为 SAP 供应链和先进计划系统的全球用户解决最复杂的优化问题



体育赛事调度

优化 NFL 赛季调度问题

Gurobi 需要在 824 万亿种组合中获得最优方案，考虑的约束包括差旅、转播权、比赛、各种活动等。

在 www.gurobi.com 网站上的最佳实践案例

在电力和能源行业的最佳实践案例

- Advanced Microgrid Solution
 - 高效率电力分配
 - https://www.gurobi.com/case_study/advanced-microgrid-solutions/
- Ogimoto
 - 平衡电力供应和需求
 - https://www.gurobi.com/case_study/ee-english-ogimoto/
- East Daley
 - 采用 MIP 优化能源资产管理
 - https://www.gurobi.com/case_study/east-daley-using-mip-to-model-midstream-energy-assets/

还有很多其他案例

同时有很多其他资料

- 示范案例和代码
- 操作演示
- 知识库
- 等等

运筹学领域的 Franz Edelman 奖项

每年颁发给对社会产生最大影响力的运筹学项目

最终入围团队的潜在经济效益: **\$257 billion**

大部分团队采用 LP 或者 MIP 技术取得这些成果

<https://www.informs.org/Recognizing-Excellence/INFORMS-Prizes/Franz-Edelman-Award>



MIP 的应用领域

财会
广告
农业
航空公司
ATM 服务
计算编译
国防
电力
能源
金融
食品
林业
油气传输
政府服务
互联网应用
物流/供应链
医疗
采矿

国家实验室
网络交友
投资组合优化
铁路
回收
营销管理
半导体
船舶运输
社交网络
采购
体育博彩
赛事调度
统计
钢铁制造
通讯
交通运输
公共事业
人力资源

混合整数优化 – 应用

安全约束下的机组组合发电问题

Security Constrained Unit Commitment (SCUC)

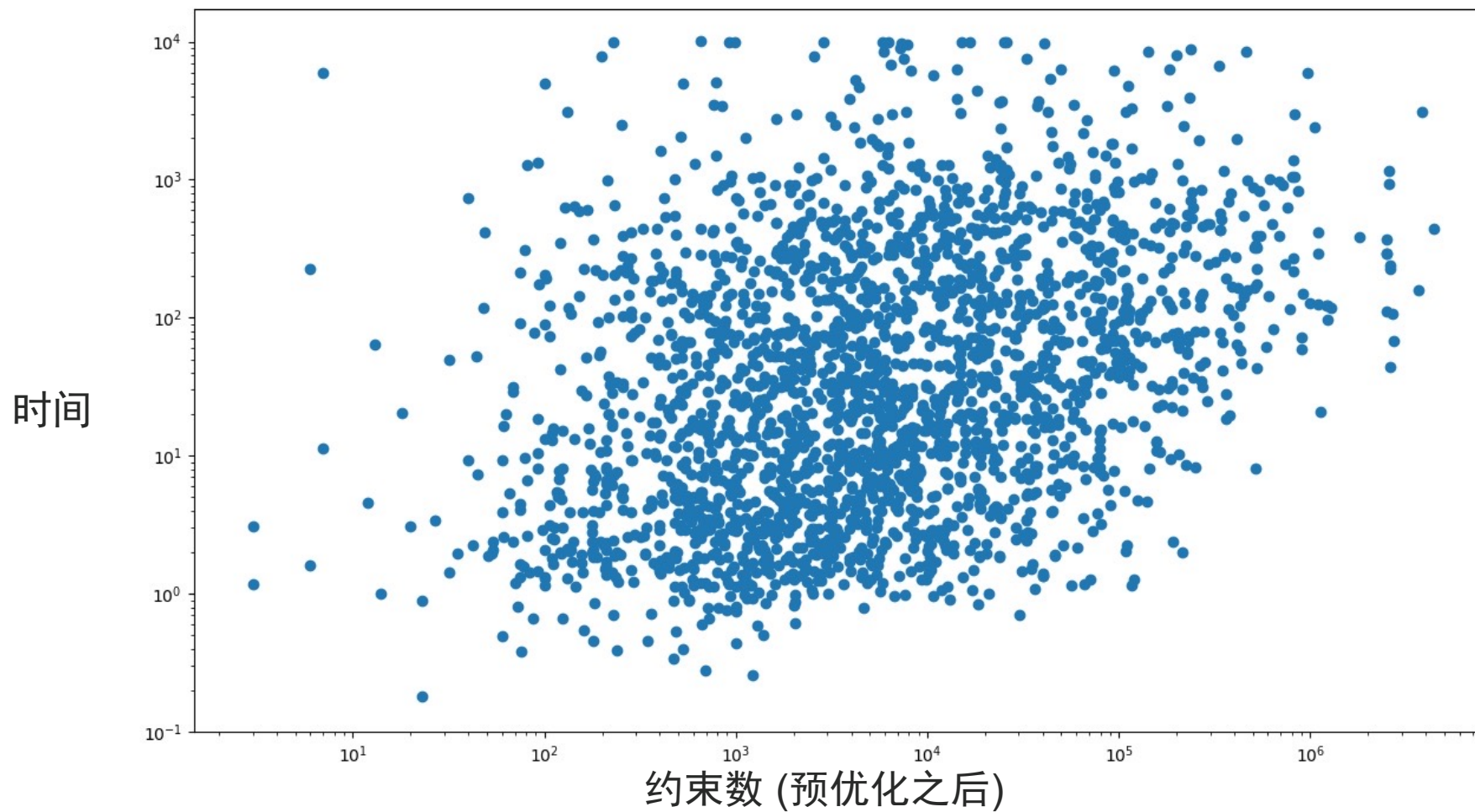
安全约束下的机组组合发电问题

求解SCUC最耗时部分是求解一个混合整数优化(MIP) 问题是...

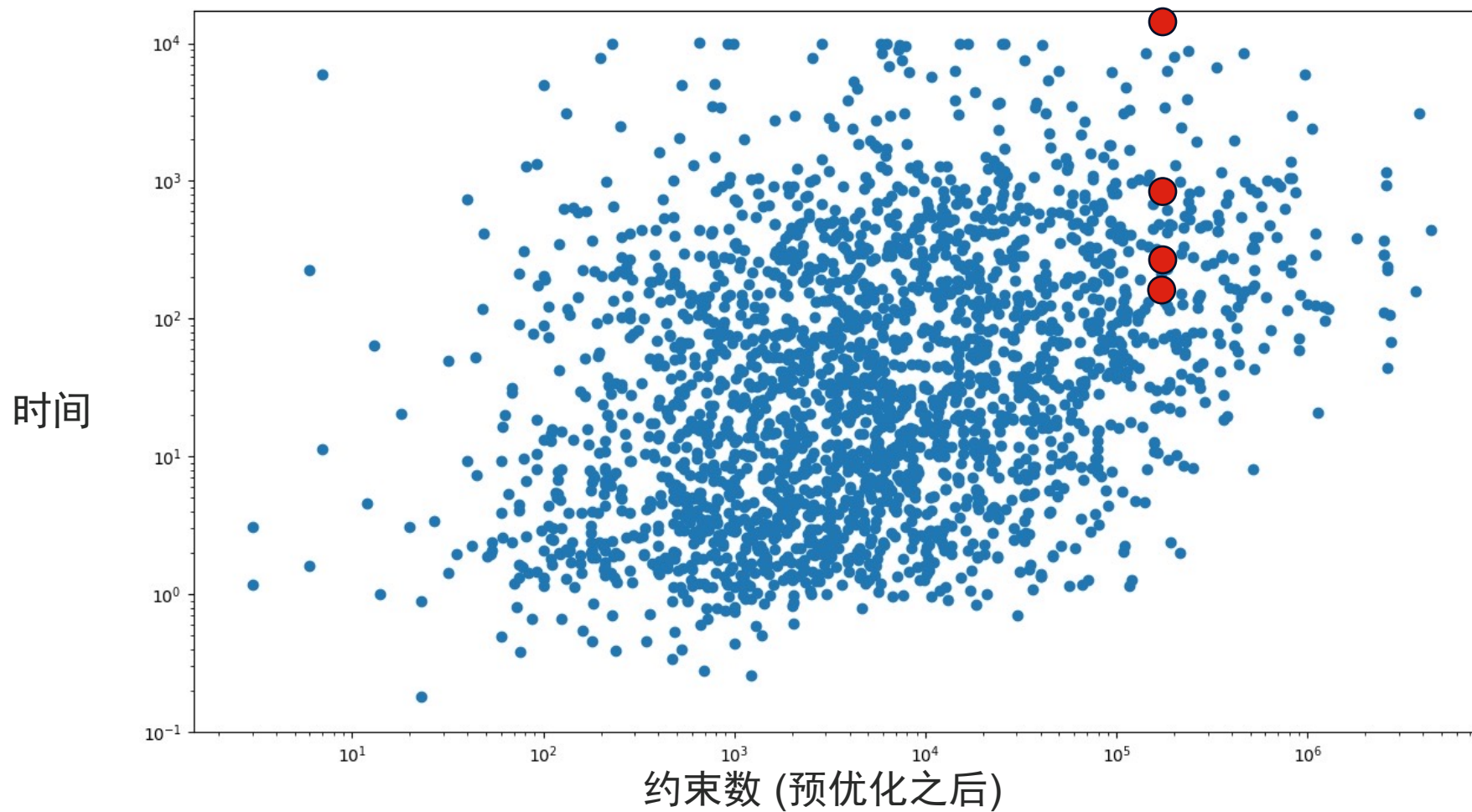
- SCUC 模型在 MIP 模型中属于特别困难吗？
- “通用” MIP 启发算法能扮演什么角色？

SCUC 的 MIP 模型更困难吗？

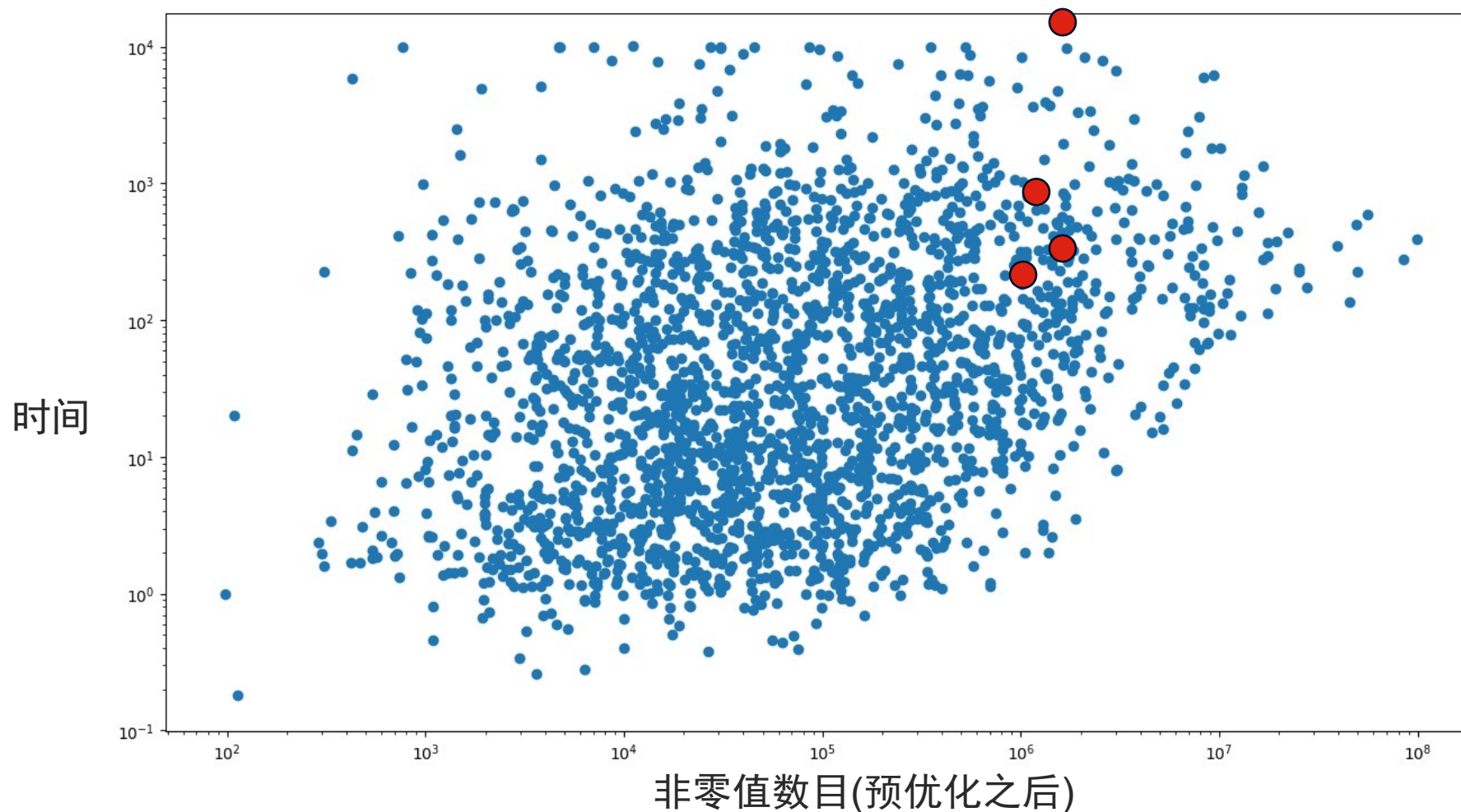
Gurobi MIP 模型测试集合 (10s-10000s) - 2507 模型



SCUC 的 MIP 模型更困难吗？



SCUC 的 MIP 模型更困难吗？



性能改进: 8.1 to 9.0

70 MISO 模型

提速

- 70 模型
 - 平均提速 39%
 - 50 更快 / 4 更慢 / 16 差距在 3% 之内
- 22 模型 > 1000 sec
 - 平均提速 76% faster
 - 19 更快 / 1 更慢 / 2 差距在 3% 之内

SCUC 模型的特质

大部分变量是连续变量

- 虚拟出价 – 不对应实体发电机组
 - 不限出价数

虚拟出价对发现比较好的可行解很重要

- 证据: 如果移除它们...
 - 找可行解变得很困难
 - 解质量明显变差

大量可行解

- 在求解 MIP 中二个主要问题
 - 高质量可行解
 - 下界

SCUC 模型的特质

松弛问题求解代价很高

- 对于对偶单纯形大约需100 秒
- 因此评估解的代价很高

根节点花费了大部分解的时间

- 代价高昂的松弛求解
- 切平面 - 对于上下界很重要
- 启发算法

启发算法

最好的 MIP 启发算法可以缩小问题规模

- 举例: 基于松弛的邻域搜索 (RINS)
- 基于某些指标的整数值固定

单纯固定整数值并不会显著缩小问题规模

- 大部分变量是连续变量

时间都花在根节点

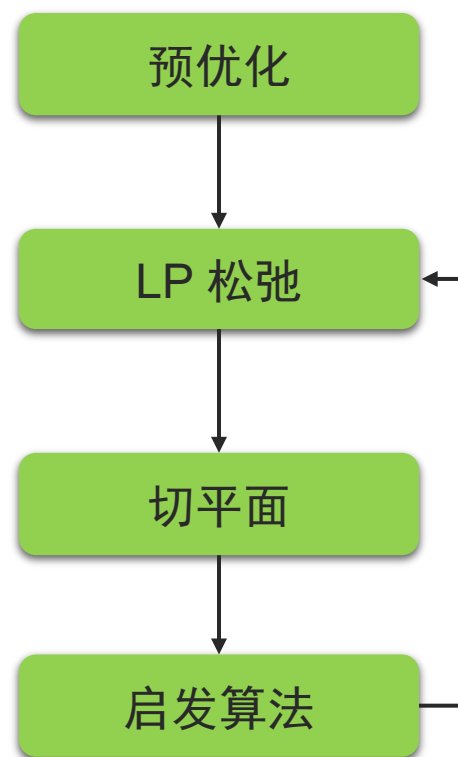
- 松弛解变化不大

结果是

- 我们做不了太多解搜索
- 选择好的固定值策略很重要

MIP 根节点

根节点的处理过程...



二个简单的观察

每次根节点切平面过程会提供一个不同的松弛解

- 可以作为启发算法的初始种子

在松弛问题中具备显著递减成本(**reduced cost**)的整数变量一般是好的固定选择对象

- 但不是一个通常情况下都有效的策略
 - 对大多数模型找到可行解也比较困难

固定和递减成本

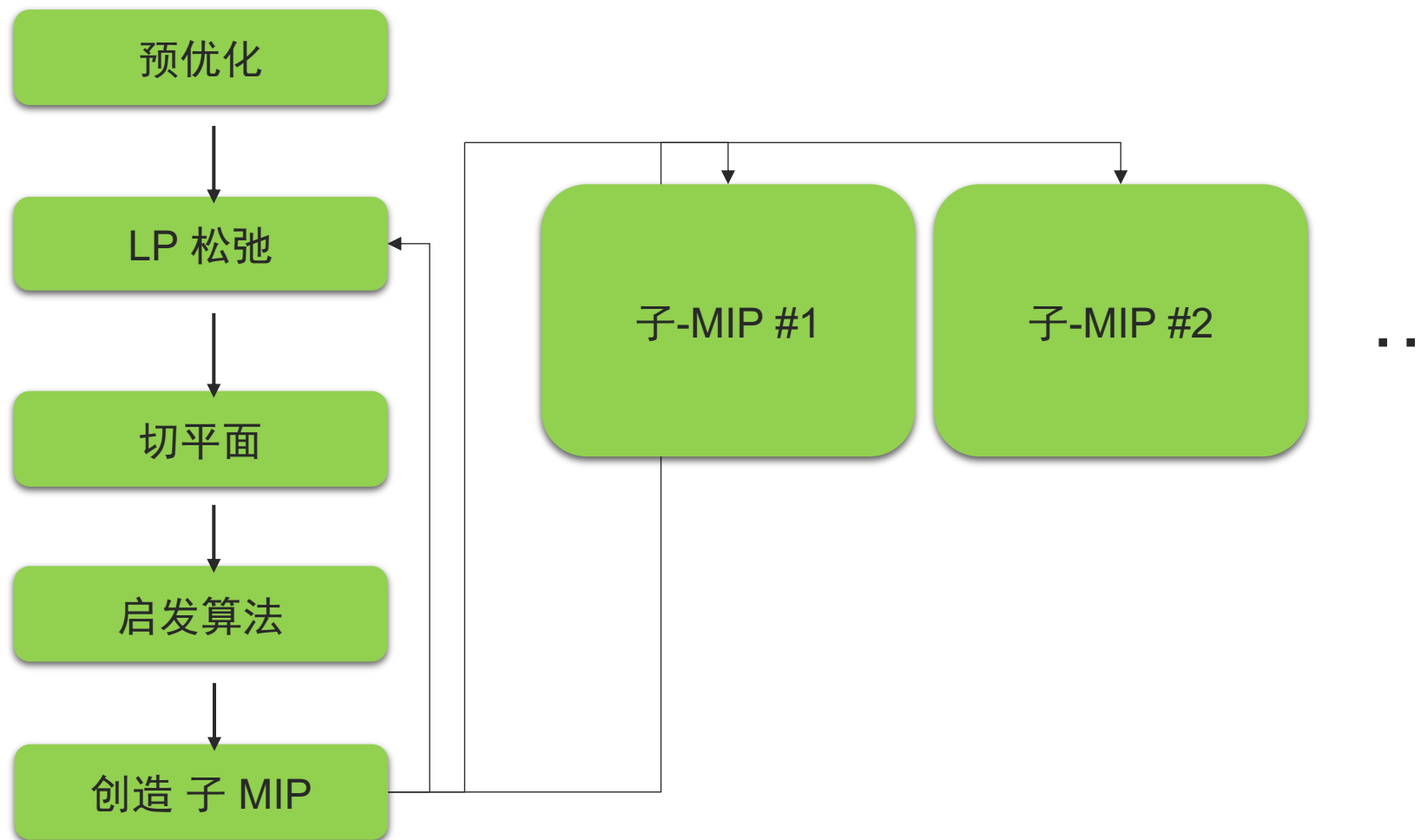
启发算法框架

- 在某个根节点切平面循环中...
 - 创建子MIP模型，其中固定非0递减成本的变量
 - 启动新线程求解该 MIP
- 直到根节点处理完毕或者线程用尽
- 主线程持续进行标准的MIP搜索
 - 收集被启发算法辅助线程发现的解
 - 对于其他线程发现的解施加改进启发算法

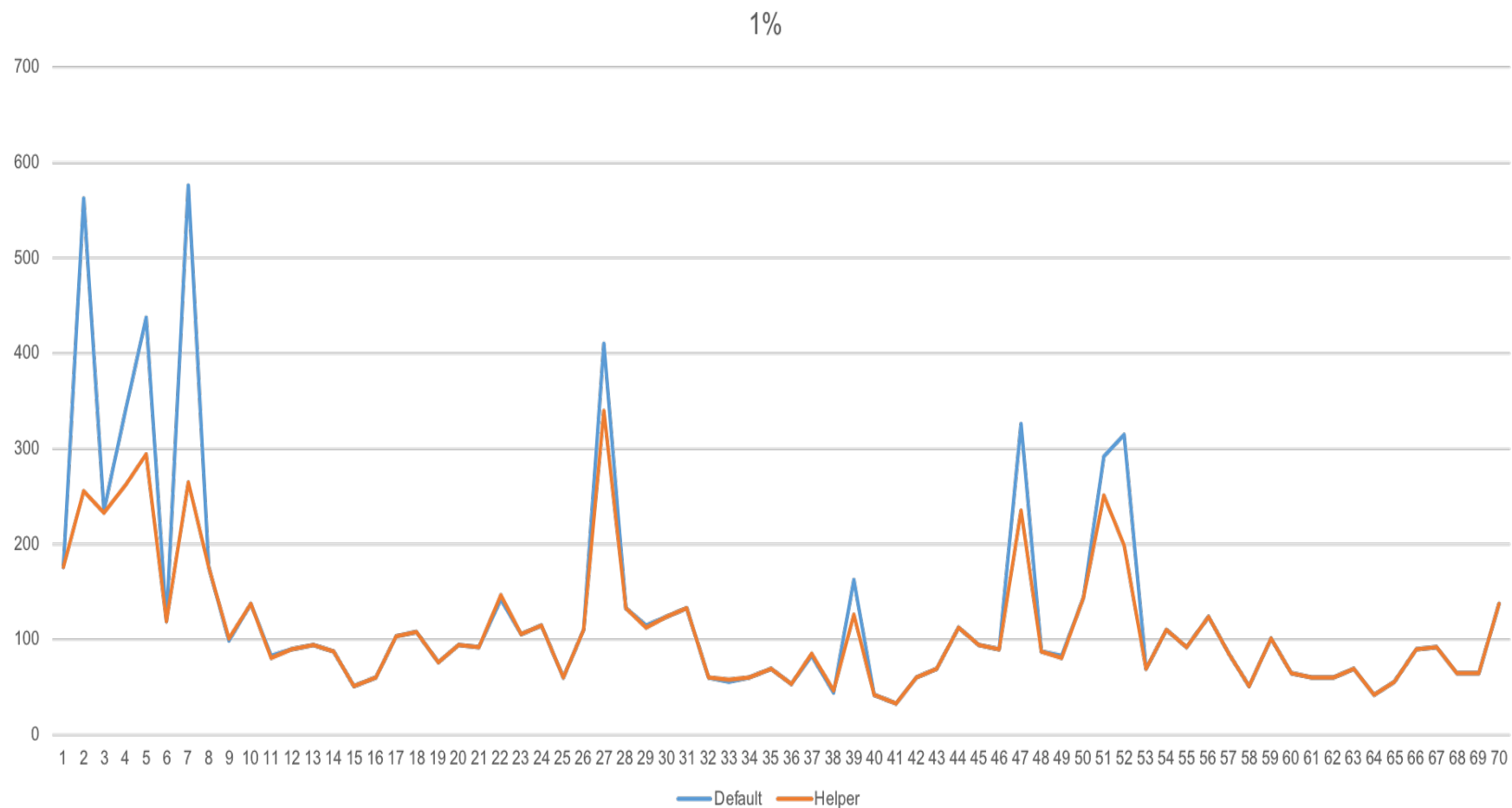
集成到标准求解器中

- 同样的预优化、切平面、根启发、分支策略, ...

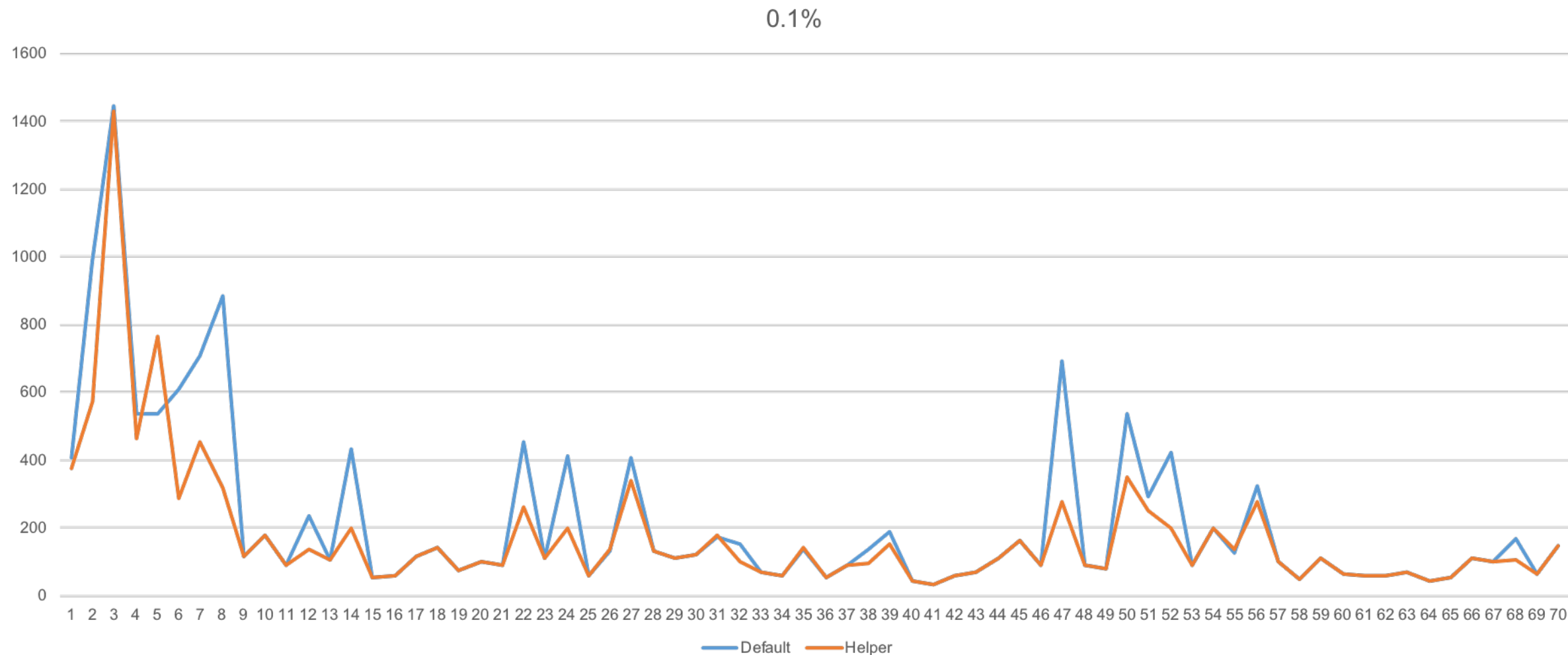
带启发辅助的根节点



结果 - 1% 差值到最优的目标



结果 - 0.1% 差值到最优的目标



变化

有限的变化

- 所有辅助线程都是从松弛解出发
- 松弛有变化，但不会太多

引入随机因素增加变化

- 固定有显著递减成本的变量
- 也随机固定一部分取分数值的变量
 - 按照概率，基于分数值进行固定
- 在每一轮切平面循环中启动多个启发算法线程

结果

最佳可行解目标值 12 线程 (11 辅助线程)...

Instance	Simple helper – 300s	Diversified – 300s	Simple helper – 600s	Diversified – 600s
116_116	9198838	9198411	9191452	9188358
116_117	1.4347e7	1.4329e7	1.4347e7	1.4313e7
116_119	5407944	5376087	5370924	5372704

在切平面循环后期启动的启发算法在发现好的可行解上有些小的优势

谢谢- 欢迎提问?



GUROBI
OPTIMIZATION

The World's Fastest Solver

接下来

- 欢迎试用 **Gurobi 9.1**， 中国地区联系 help@gurobi.cn
 - 申请 30 天商业试用许可
 - 申请免费学术许可
- 关于 **Gurobi** 商务信息， 中国地区联系 help@gurobi.cn
- 过往精彩网络讲座回看
 - 沃达丰利用 **Gurobi** 进行通讯网络优化
 - 如何将机器学习和**Gurobi**结合解决实际问题
 - 关注通知 www.gurobi.com/events